

三维稀疏阵列及其基于耦合张量分解的 DOA 估计

罗中华¹, 左富豪², 樊棠怀¹, 饶伟²

(1. 南昌理工学院电子信息工程学院, 江西 南昌 330044; 2. 南昌工程学院信息工程学院, 江西 南昌 330099)

摘 要: 为提高信号二维波达方向 (DOA) 估计性能, 提出了一种三维稀疏阵列结构及其基于耦合张量分解的 DOA 估计方法。利用子阵信号的二阶统计量构建了一个虚拟的、在 z 轴方向阵元呈稀疏分布的“十”字形立体阵。分析表明, 当阵列使用 $\frac{N^3}{2} + \frac{5N^2}{2} + 3$ (N 为大于 2 的奇数) 个物理阵元时, 其对应的虚拟阵在 x 和 y 轴方向的阵列孔径均为 $(N^2+2N-1)d$, 在 z 轴方向的阵列孔径为 $(N^2+3N)d$ 。为充分利用虚拟阵的大孔径来提升信号 DOA 估计性能, 并消除 z 轴方向阵元间距大于 d 而引起的相位模糊, 提出了借助耦合张量分解解决相位模糊并实现 DOA 估计的方法。理论分析和仿真结果表明, 在相同的物理阵元数下, 相较于现有三维阵列, 由于新方法具有更大的阵列孔径从而具有更优的估计性能。

关键词: 二维波达方向估计; 三维阵列; 阵列孔径; 耦合张量分解

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025112

3D sparse array and its DOA estimation based on coupled tensor decomposition

LUO Zhonghua¹, ZUO Fuhao², FAN Tanghuai¹, RAO Wei²

1. College of Electronics and Information, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330044, China

2. School of Information Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China

Abstract: To improve the performance of two-dimensional direction-of-arrival (DOA) estimation of signals, a three-dimensional sparse array structure and its coupled tensor decomposition-based DOA estimation method was proposed. By utilizing the second-order statistics of the signals from these subarrays, a virtual three-dimensional cross array was constructed, where the element spacing in the z -axis direction was sparse. Analysis showed that when $\frac{N^3}{2} + \frac{5N^2}{2} + 3$ (where N was an odd number greater than 2) physical elements were used in the array, the corresponding virtual array possessed an aperture of $(N^2+2N-1)d$ in the x -axis and y -axis directions and $(N^2+3N)d$ in the z -axis direction. To fully exploit the large array aperture of the virtual array for enhancing DOA estimation performance and eliminating phase ambiguity caused by the element spacing greater than d in the z -axis direction, a method using coupled tensor decomposition for resolving phase ambiguity and achieving DOA estimation was developed. Theoretical analysis and simulation results demonstrate that, when the number of physical elements used in arrays is identical, the proposed method can yield a better estimation performance than existing three-dimensional arrays, because it has a larger array aperture.

Keywords: two-dimensional direction of arrival estimation, three-dimensional array, array aperture, coupled tensor decomposition

收稿日期: 2025-02-07; 修回日期: 2025-06-05

通信作者: 饶伟, wrao14@fudan.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.62463021)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62463021)

0 引言

波达方向 (DOA, direction of arrival) 估计是阵列信号处理领域中一个典型而重要的问题, 被广泛应用于雷达、声纳、无线通信和医学成像等领域^[1-2]。在过去的几十年, 学者们提出了很多关于二维 DOA 估计的方法。例如, 多重信号分类 (MUSIC, multiple signal classification)、旋转不变技术信号参数估计 (ESPRIT, estimation of signal parameters via rotational invariance technique)、传播算子等经典方法^[3-5]。这些方法常用于相邻阵元间距不超过信号半波长 (d) 的均匀非稀疏阵列结构^[6-8], 以避免在 DOA 估计时产生相位模糊^[9]。但这会导致在阵元数一定的情况下, 阵列孔径受到限制, 而阵列孔径的大小直接影响着信号的 DOA 估计精度和分辨率性能^[10]。

为能利用较少的物理阵元得到较大的二维阵列孔径, 文献[11]和文献[12]分别提出了经典的二维嵌套阵列和二维互质阵列, 以及将这2个阵列结合在一起的二维稀疏阵列^[13]。文献[14]在二维互质阵的基础上提出了广义互质面阵和广义对称互质面阵。文献[15]和文献[16]对二维互质阵的信号处理方法进行了改进, 前者利用张量代数方法增大了自由度, 后者利用双向传播算子方法降低了计算复杂度。文献[17]对一些稀疏面阵, 如 v 型、沙漏型、保温杯型等进行了分析对比。虽然上述二维平面阵具有较大的阵列孔径, 但该阵列孔径仅局限于某个平面, 因此其对信号二维 DOA 估计性能的提升是有限的。例如, 当上述二维阵列位于 x - y 平面时, 其对信号方位角的估计性能要优于俯仰角, 这是因为其在俯仰角所对应的 z 轴方向上的阵列孔径较小。反之, 当二维阵列位于 y - z 或者 x - z 平面时, 其对信号俯仰角的估计性能要优于方位角^[18]。由此可见, 由于二维平面阵结构的限制, 在做二维 DOA 估计时, 总是存在一个角度的估计性能劣于另一个角度估计性能的情况。为不失一般性, 本文所涉及的二维阵列均假设位于 x - y 平面上, 此时阵列对信号方位角的估计性能要优于俯仰角。

为了平衡2个角度估计的性能, 即同时提升信号俯仰角和方位角的估计精度和角度分辨率, 文献[18]和文献[19]分别提出了经典的三维 L 形阵和三维锥形阵。在此基础上, 文献[20]和文献[21]分别提出了广义三维互质阵和三维互质阵。文献[22]

对三维互质阵的信号处理方法进行了改进。值得注意的是, 上述方法均是通过在 z 轴方向增设较多物理阵元的方式来增加 z 轴方向上的阵列孔径。这些阵列在 x 、 y 和 z 轴3个方向上的阵列孔径增益对物理阵元数的增加呈低敏感性。即物理阵元数需大幅增加, 阵列孔径才能获得有限的扩展, 这导致阵列资源利用率低。以三维锥形阵为例, 假设其在各轴方向上的孔径原本都为 a 倍半波长, 若需扩大至 $a+1$ 倍半波长, 则需增加 $2a+1$ 个物理阵元, 且 a 越大, 所需物理阵元数越多。

为能利用较少的物理阵元获得更大的三维阵列孔径, 以进一步提升入射信号的二维 DOA 估计精度和角度分辨率性能, 本文提出了一种三维稀疏阵列结构及其基于耦合张量分解的信号处理方法。该阵列由一个非均匀稀疏的立体子阵和2个均匀稀疏的线形子阵组成。其中立体子阵在 x 和 y 轴方向的阵元间距均为信号半波长 d , 在 z 轴方向上的阵元间距大于 d 。2个线形子阵分别位于 x 和 y 轴, 且阵元间距均大于 d 。利用立体子阵接收信号分别和2个线形子阵接收信号的互相关, 构建了一个虚拟的“十”字形立体阵, 且其阵元在 x 和 y 轴方向呈阵元间距均为 d 的均匀非稀疏分布, 而在 z 轴方向呈阵元间距均大于 d 的均匀稀疏分布。分析表明, 当阵列使用 $\frac{N^3}{2} + \frac{5N^2}{2} + 3$ (N 为大于2的奇数) 个物理阵元时, 其对应的虚拟阵在 x 和 y 轴方向的阵列孔径均为 $(N^3+2N-1)d$, 在 z 轴方向的阵列孔径为 $(N^3+3N)d$ 。虽然虚拟阵在 x 、 y 和 z 轴3个方向上同时具有较大的阵列孔径, 但其在 z 轴方向上的阵元间距大于 d , 这将导致俯仰角的估计值虽然精度较高但存在相位模糊。为此, 还提出了针对虚拟立体阵信号进行建模和处理的方法。首先, 构建了虚拟立体阵的耦合 CP (canonical polyadic) 张量 (简称“耦合张量”) 模型。然后, 利用耦合张量分解得到2组 DOA 估计值。其中一组是较高精度的方位角估计值和较低精度的俯仰角估计值, 其来自虚拟立体阵在 x - y 平面的阵列孔径。另一组是具有较高精度但伴有相位模糊的俯仰角估计值, 其来自虚拟立体阵在 z 轴方向上的阵列孔径。最后, 将较低精度的俯仰角估计值作为参照, 消除相位模糊得到较高精度的俯仰角估计值。与现有的三维锥形阵、三维 L 形阵和三维互质阵相比, 在物理阵元数相同的情况

下, 由于本文方法具有较大的三维阵列孔径, 因而具有更高的 DOA 估计精度和更优的信号分辨率性能。仿真实验验证了本文方法的有效性。

由于本文方法聚焦于通过增加三维阵列孔径来提升信号二维 DOA 估计性能, 因此, 为便于分析, 有如下前提假设: 阵元的接收信号特性仅与其所处的位置有关, 阵元均为全相阵元, 所有阵元增益均相同, 且相互之间忽略互耦; 所有噪声均为加性白高斯噪声, 且和信号相互独立; 所有入射信号均为远场窄带不相关信号。

1 张量基础

本文将使用张量代数理论对阵列信号进行处理, 其中所涉及的部分张量基础如下。

定义 1 N 阶张量的 CP 分解^[23]。令 N 阶张量 $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ 的秩为 K , 张量 CP 分解是指将该张量表示为 K 个秩为 1 的张量 $\mathbf{x}_k^{(1)} \circ \mathbf{x}_k^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{x}_k^{(N)}$, $1 \leq k \leq K$ 的线性组合, 即

$$\mathcal{R} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{x}_k^{(1)} \circ \mathbf{x}_k^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{x}_k^{(N)} \quad (1)$$

其中, c_k 表示常系数, $\mathbf{x}_k^{(n)} \in \mathbb{C}^{I_n}$ ($1 \leq n \leq N$), 符号“ \circ ”表示外积。能够进行上述 CP 分解的张量可称之为“CP 张量”。

定理 1 三阶张量 CP 分解唯一性^[24]。对于一个三阶张量的 CP 分解, 如果 $\mathcal{R} = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k^{(1)} \circ \mathbf{x}_k^{(2)} \circ \mathbf{x}_k^{(3)}$, 则该分解唯一的充分条件为

$$\text{krank}(\mathbf{X}^{(1)}) + \text{krank}(\mathbf{X}^{(2)}) + \text{krank}(\mathbf{X}^{(3)}) \geq 2K + 2 \quad (2)$$

其中, $\mathbf{X}^{(i)} = [\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_K^{(i)}]$ ($1 \leq i \leq 3$) 表示 $\mathbf{x}_k^{(i)}$ 所对应的因子矩阵, $\text{krank}(\cdot)$ 表示求因子矩阵的 Kruskal 秩^[24] (简称为 k -秩)。

定义 2 CP 张量的张量展开^[25]。对于一个 N 阶 CP 张量 $\mathcal{R} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{x}_k^{(1)} \circ \mathbf{x}_k^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{x}_k^{(N)}$, 其维度索引组成一个集合 $\mathbb{Z} = \{1, \dots, N\}$ 。假设有 M 个有序集合 $\mathbb{F}_m = \{a_{m,1}, \dots, a_{m,L_m}\}$, $m = 1, \dots, M$, 这些集合满足关系 $\mathbb{F}_1 \cup \dots \cup \mathbb{F}_M = \mathbb{Z}$ 且 $\mathbb{F}_i \cap \mathbb{F}_j = \emptyset$ ($1 \leq i, j \leq M$, 且 $i \neq j$)。按照上述 M 个有序集合对 N 阶 CP 张量 \mathcal{R} 进行模 $\mathbb{F}_1 \dots \mathbb{F}_M$ 的展开^[26]后, 可得一个 M 阶的 CP 张量。

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}_1 \dots \mathbb{F}_M} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{b}_k^{(1)} \circ \mathbf{b}_k^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{b}_k^{(N)} \in \mathbb{C}^{I_{\mathbb{F}_1} \times \dots \times I_{\mathbb{F}_M}} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{b}_k^{(m)} = \mathbf{a}^{(a_{m,L_m})} \otimes \mathbf{a}^{(a_{m,L_m-1})} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{(a_{m,1})}$, $I_{\mathbb{F}_m} = I_{a_{m,1}} \times \dots \times I_{a_{m,L_m}}$, 符号“ \otimes ”表示 Kronecker 积。

定义 3 三阶耦合 CP 张量^[27]。由 M 个三阶 CP 张量 $\mathcal{R}^{(m)} \in \mathbb{C}^{I_m \times J_m \times R}$, $m = \{1, \dots, M\}$ 组成的三阶耦合 CP 张量 $\{\mathcal{R}^{(m)}\}$, 需具有如式(4)所示的 CP 分解形式。

$$\mathcal{R}^{(m)} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k^{(m)} \circ \mathbf{b}_k^{(m)} \circ \mathbf{c}_k \in \mathbb{C}^{I_m \times J_m \times R} \quad (4)$$

其中, $\mathbf{a}_k^{(m)} \in \mathbb{C}^{I_m}$, $\mathbf{b}_k^{(m)} \in \mathbb{C}^{J_m}$, $\mathbf{c}_k \in \mathbb{C}^R$ 。耦合 CP 张量 $\{\mathcal{R}^{(m)}\}$ 中除了各张量具有相同的 k -秩 (K) 以外, 它的 CP 分解式中至少包含一个公共项, 即耦合项 \mathbf{c}_k 。

定理 2 耦合 CP 张量分解唯一性^[27]。如定义 3 的式(4)中提到的 $\mathcal{R}^{(m)} \in \mathbb{C}^{I_m \times J_m \times R}$, $m = \{1, \dots, M\}$, 满足条件 $\exists m \in \{1, \dots, M\}$, 使得 $\mathcal{R}^{(m)}$ 的秩为 R , 则 $\mathcal{R}^{(m)}$ 的耦合 CP 分解是唯一的, 且如果 \mathbf{C} 列满秩, 此时 $\{\mathcal{R}^{(m)}\}$ 的耦合 CP 张量分解唯一。

2 三维稀疏阵列

本文提出的三维稀疏阵列结构如图 1 所示, 其由一个位于 x - y 平面下方且以 z 轴为中心轴的立体子阵和 2 个分别位于 x 和 y 轴上的均匀线形子阵组成。其中, 立体子阵与原点的距离为 $\frac{d_{Rz}}{2}d$ (d_{Rz} 为大于 1 的正整数), 物理阵元数为 $N_{Rx} \times N_{Ry} \times N_{Rz}$ 个, 且其在 x 和 y 轴方向的相邻阵元间距为信号半波长 d , 在 z 轴方向上的相邻阵元间距为 $d_{Rz}d$, 因此该立体子阵在 z 轴方向上呈稀疏分布。位于 x 和 y 轴上的 2 个均匀线形子阵的物理阵元数分别为 N_{Lx} 和 N_{Ly} 个, 且其相邻阵元间距分别为 $d_{Lx}d$ 和 $d_{Ly}d$ (d_{Lx} 和 d_{Ly} 为大于 1 的正整数), 因此这 2 个均匀线形子阵的阵元呈均匀稀疏分布。

为保证后期生成的虚拟“十”字形立体阵在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上的阵列孔径基本一致, 即其在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上所占的空间长度基本一致, 以确保在进行 DOA 估计时, 估计俯仰角所用到的阵列孔径和估计方位角所用到的阵列孔径大致相同, 进行如式(5)~式(9)所示设置。

$$d_{Rz} = N^2 + 3 \quad (5)$$

$$N_{R_x} = N_{R_y} = N \quad (6)$$

$$N_{R_z} = \frac{N+1}{2} \quad (7)$$

$$d_{L_x} = d_{L_y} = N \quad (8)$$

$$N_{L_x} = N_{L_y} = N^2 + 2 \quad (9)$$

其中, N 为大于 2 的奇数。

令 Loc_{R_x} 、 Loc_{R_y} 和 Loc_{R_z} 分别是立体子阵在 x 、 y 和 z 轴方向上的阵元位置, Loc_{L_x} 和 Loc_{L_y} 分别是 x 和 y 轴上的线形子阵的阵元位置, 则三维阵列中各阵元位置表示为

$$\begin{cases} \text{Loc}_{R_x} = \text{Loc}_{R_y} = \left(-\frac{N-1}{2}:1:\frac{N-1}{2}\right)d \\ \text{Loc}_{R_z} = \left(-\frac{N}{2}:1:-\frac{1}{2}\right)(N^2+3)d \\ \text{Loc}_{L_x} = \text{Loc}_{L_y} = \left[-\frac{(N^2+2)-1}{2}:1:\frac{(N^2+2)-1}{2}\right]Nd \end{cases} \quad (10)$$

其中, 2 个冒号 “:” 两侧的数值分别代表待取数的上下限, 中间的数值代表取数的间隔。

假设 $N=5$, 那么新三维阵列中各阵元的位置如图 1 所示, 为方便表示, 该图及后续图中略去了 d 。

假设有 K 个窄带远场不相关信号 $\{s_k\}_{k=1}^K$, 入射到该阵列上, 信号的二维 DOA 估计设为 $\{(\phi_k, \theta_k)\}_{k=1}^K$, 其中 ϕ_k 和 θ_k 分别表示第 k 个信号的俯

仰角和方位角, 则阵列中的 3 个子阵, 即 x 、 y 轴上的线形子阵和立体子阵的接收信号可以分别表示为

$$\mathbf{X}_{L_x} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{L,k} \circ \mathbf{s}_k + \mathbf{M}_{L_x} \in \mathbb{C}^{(N^2+2) \times N_s} \quad (11)$$

$$\mathbf{X}_{L_y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_{L,k} \circ \mathbf{s}_k + \mathbf{M}_{L_y} \in \mathbb{C}^{(N^2+2) \times N_s} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_R &= \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{R,k} \circ \mathbf{s}_k + \\ \mathcal{M}_R &\in \mathbb{C}^{N \times N \times \frac{(N+1)}{2} \times N_s} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{s}_k = [s_k(1), \dots, s_k(N_s)]^T$ (N_s 是快拍数) 为第 k 个入射信号向量, $\mathbf{a}_{L,k}$ 和 $\mathbf{b}_{L,k}$ 分别为 x 和 y 轴上线形子阵的方向向量, \mathbf{M}_{L_x} 和 \mathbf{M}_{L_y} 为加性白高斯噪声矩阵, $\mathbf{a}_{R,k}$ 、 $\mathbf{b}_{R,k}$ 和 $\mathbf{c}_{R,k}$ 分别为立体子阵在 x 、 y 和 z 轴方向上的方向向量, \mathcal{M}_R 为加性白高斯噪声张量。

令方向余弦分别表示为

$$\begin{cases} \omega_{x,k} = \sin \phi_k \cos \theta_k \\ \omega_{y,k} = \sin \phi_k \sin \theta_k \\ \omega_{z,k} = \cos \phi_k \end{cases} \quad (14)$$

以及令 $\Theta_k = e^{-j\pi\omega_{x,k}}$, $\Psi_k = e^{-j\pi\omega_{y,k}}$, $\Omega_k = e^{-j\pi\omega_{z,k}}$, 则

$$\mathbf{a}_{L,k} = \left[\Theta_k^{\frac{-N^3-N}{2}}, \Theta_k^{\frac{-N^3-N}{2}+N}, \dots, \Theta_k^{\frac{N^3+N}{2}} \right]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{b}_{L,k} = \left[\Psi_k^{\frac{-N^3-N}{2}}, \Psi_k^{\frac{-N^3-N}{2}+N}, \dots, \Psi_k^{\frac{N^3+N}{2}} \right]^T \quad (16)$$

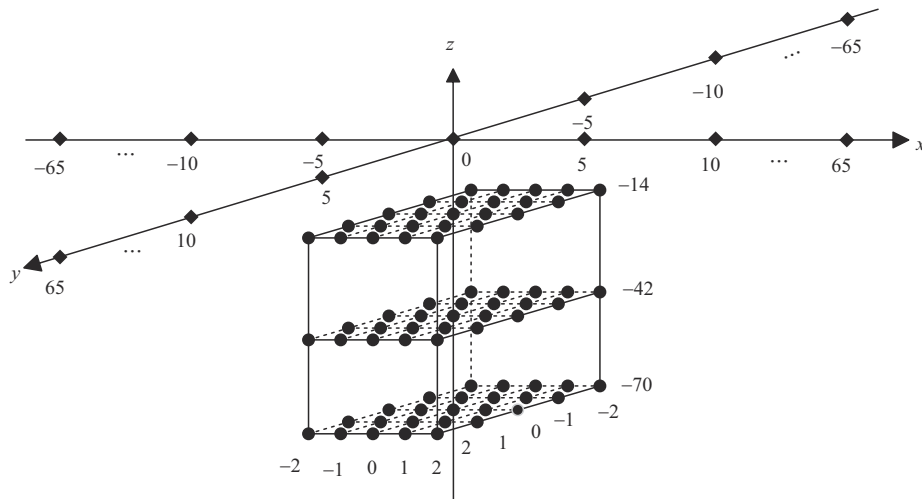


图 1 三维稀疏阵列结构 ($N=5$)

$$\mathbf{a}_{R,k} = \left[\Theta_k^{\frac{1-N}{2}}, \Theta_k^{\frac{1-N}{2}+1}, \dots, \Theta_k^{\frac{N-1}{2}} \right]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_{R,k} = \left[\Psi_k^{\frac{1-N}{2}}, \Psi_k^{\frac{1-N}{2}+1}, \dots, \Psi_k^{\frac{N-1}{2}} \right]^T \quad (18)$$

$$\mathbf{c}_{R,k} = \left[\Omega_k^{\frac{-N^3-3N}{2}}, \Omega_k^{\frac{-N^3-3N}{2}+(N^2+3)}, \dots, \Omega_k^{\frac{-N^2+3}{2}} \right]^T \quad (19)$$

3 虚拟立体阵

利用张量运算对上述 3 个子阵的接收信号进行如下处理可得到一个虚拟“十”字形立体阵，它由 2 个垂直交叉的“虚拟立体子阵 1”和“虚拟立体子阵 2”组成。

将 x 轴上线形子阵的接收信号矩阵和立体子阵接收信号张量进行互相关张量操作，得到张量

$$\mathbf{R}_1 \in \mathbb{C}^{(N^2+2) \times N \times N \times \frac{N+1}{2}} \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_1 = E \{ \mathbf{X}_{Lx} \circ \mathbf{C}_R^* \} = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{L,k} \circ \mathbf{a}_{R,k}^* \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{R,k}^*) \sigma_k^2$$

其中， σ_k^2 表示第 k 个入射信号的功率，上标“*”表示取共轭。

根据 $\mathbf{a}_{R,k}$ 、 $\mathbf{b}_{R,k}$ 和 $\mathbf{c}_{R,k}$ 的表达式可知，将 \mathbf{R}_1 中第 2、3 和 4 维度都进行倒置得到的张量 \mathbf{R}_2 可写为

$$\mathbf{R}_2 = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{L,k} \circ \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{RD,k}) \sigma_k^2 \quad (21)$$

其中， $\mathbf{c}_{RD,k} = \left[\Omega_k^{\frac{N^2+3}{2}}, \Omega_k^{\frac{N^2+3}{2}+(N^2+3)}, \dots, \Omega_k^{\frac{N^3+3N}{2}} \right]^T$ 。

为获得更多的有效数据，对 \mathbf{R}_1 求共轭得到 \mathbf{R}_3 。

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1^* = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{L,k}^* \circ \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{R,k}) \sigma_k^2 \quad (22)$$

根据 $\mathbf{a}_{L,k}$ 的表达式可知，将 \mathbf{R}_3 中第一维度进行倒置得到的张量 \mathbf{R}_4 可写为

$$\mathbf{R}_4 = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{L,k} \circ \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{R,k}) \sigma_k^2 \quad (23)$$

由于张量 \mathbf{R}_2 和 \mathbf{R}_4 的前 3 个维度相同，因此可将它们组合构建成一个 $(N^2+2) \times N \times N \times (N+1)$ 的四阶张量 \mathbf{R}_5 ，组合方式如式(24)所示。

$$\begin{cases} \mathbf{R}_5(:, :, :, 1: \frac{N+1}{2}) = \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_5(:, :, :, \frac{N+1}{2} + 1: N+1) = \mathbf{R}_2 \end{cases} \quad (24)$$

其中，每个冒号“:”表示其所在维度上的所有索引。

此时， \mathbf{R}_5 可表示为

$$\mathbf{R}_5 = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{L,k} \circ \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k}) \sigma_k^2 \in \mathbb{C}^{(N^2+2) \times N \times N \times (N+1)} \quad (25)$$

其中， $\mathbf{c}_{V,k} = [\mathbf{c}_{R,k}^T, \mathbf{c}_{RD,k}^T]^T$ 。

利用定义 2 对 \mathbf{R}_5 进行模 {2,1}{3}{4} 的张量展开，可得

$$\mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_5_{\{2,1\}\{3\}\{4\}} = \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{R,k} \otimes \mathbf{a}_{L,k}) \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{V,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \in \mathbb{C}^{(N^3+2N) \times N \times (N+1)} \quad (26)$$

其中，

$$\mathbf{a}_{V,k} = \left[\Theta_k^{\frac{1-N^3-2N}{2}}, \Theta_k^{\frac{1-N^3-2N}{2}+1}, \dots, \Theta_k^{\frac{N^3+2N-1}{2}} \right]^T \quad (27)$$

显然，张量 \mathbf{R}_6 可看作一个虚拟立体子阵（如图 2 所示）的接收信号张量。将该阵列定义为“虚拟立体子阵 1”。

在张量 \mathbf{R}_6 中， $\mathbf{a}_{V,k}$ 、 $\mathbf{b}_{R,k}$ 和 $\mathbf{c}_{V,k}$ 分别是“虚拟立体子阵 1”在 x 、 y 和 z 轴方向的方向向量。但值得注意的是，此时的 K 个等效入射信号为单快拍下的 $\sigma_k^2 (1 \leq k \leq K)$ 。特别地，在图 1 所给的阵列参数 ($N=5$) 下，张量 \mathbf{R}_6 所对应的“虚拟立体子阵 1”在 x 、 y 和 z 轴方向上的阵元位置分别是 $[-67:1:67]d$ 、 $[-2:1:2]d$ 和 $[-70:28:70]d$ 。

由式(26)可知，其对应的虚拟立体子阵 1（如图 2 所示）在 x 轴方向上共有 N^3+2N 个阵元间距为半波长的阵元，所以虚拟立体子阵 1 在 x 轴方向上的阵列孔径为 $(N^3+2N-1)d$ 。在 z 轴方向上共存在 $N+1$ 个阵元，且阵元间距为 $(N^2+3)d$ ，所以虚拟立体子阵 1 在 z 轴方向上的阵列孔径为 $(N^3+3N)d$ 。

同理，利用 y 轴上线形子阵的接收信号和立体子阵的接收信号，可构造“虚拟立体子阵 2”，如图 3 所示，其接收信号张量 \mathbf{X}_6 可表示为

$$\mathbf{X}_6 = \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_{V,k} \circ \mathbf{a}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \in \mathbb{C}^{(N^3+2N) \times N \times (N+1)} \quad (28)$$

其中， $\mathbf{b}_{V,k}$ 为

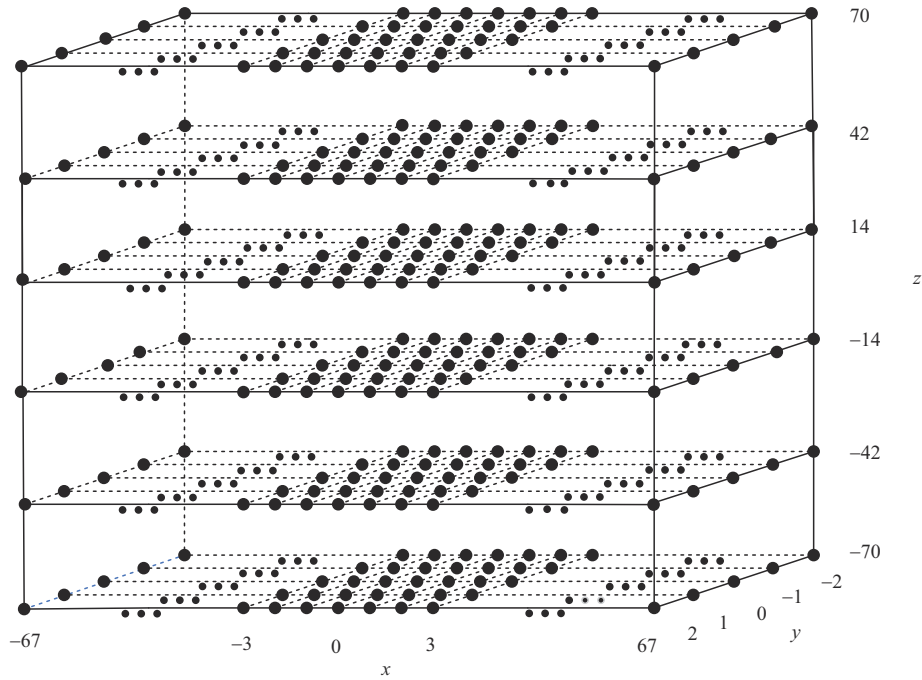


图2 虚拟立体子阵1(N=5)

$$\mathbf{b}_{V,k} = \left[\psi_k \frac{1-N^3-2N}{2}, \psi_k \frac{1-N^3-2N}{2} + 1, \dots, \psi_k \frac{N^3+2N-1}{2} \right]^T \quad (29)$$

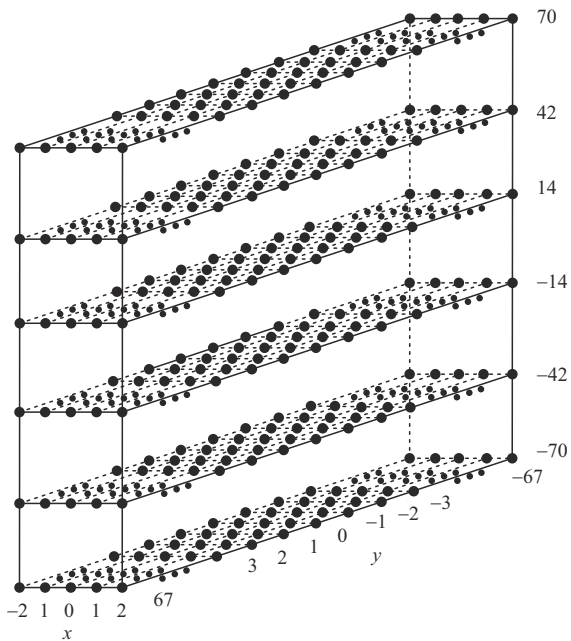


图3 虚拟立体子阵2(N=5)

特别地, 在图1所给的阵列参数(N=5)下, 张量 \mathcal{X}_6 所对应的“虚拟立体子阵2”在x、y和z轴方向上的阵元位置分别为 $[-2:1:2]d$ 、 $[-67:1:67]d$ 和 $[-70:28:70]d$ 。

由式(28)可知, 其对应的虚拟立体子阵2(如图2所示)在y轴方向上共有 $N^3 + 2N$ 个阵元间距为半波长的阵元, 所以虚拟立体子阵2在y轴方向上的阵列孔径为 $(N^3 + 2N - 1)d$ 。在z轴方向上共存在 $N+1$ 个阵元, 且阵元间距为 $(N^2 + 3)d$, 所以虚拟立体子阵2在z轴方向上的阵列孔径为 $(N^3 + 3N)d$ 。

至此, 通过对新三维稀疏阵列的接收信号进行上述处理后, 得到一个虚拟的“十”字形立体阵, 如图4所示。该阵列由2个垂直交叉的“虚拟立体子阵1”和“虚拟立体子阵2”构成, 它们的位置关系如图4所示, 其中包含2个立体子阵的重合部分。

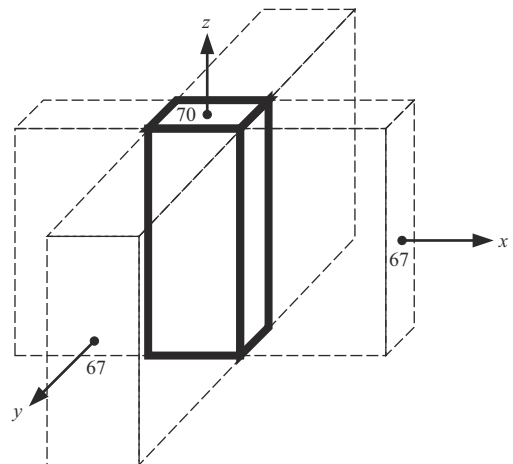


图4 虚拟“十”字形立体阵(N=5)

由图 4 可知, 虚拟立体阵在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上都具有较大的阵列孔径。具体地, 当新三维稀疏阵列中的立体子阵尺寸设置成 $N \times N \times \frac{1}{2}(N+1)$, 其中 x 和 y 轴方向上的阵元间距为半波长, z 轴方向上的阵元间距为 $d_{Rz} = N^2 + 3$ 倍的半波长。当 x 和 y 轴上的均匀稀疏线形子阵尺寸设置成 $N^2 + 2$ 时, 阵列共包含 $\frac{1}{2}N^3 + \frac{5}{2}N^2 + 3$ 个物理阵元。生成的“虚拟立体子阵 1”的尺寸为 $N(N^2 + 2) \times N \times (N + 1)$, “虚拟立体子阵 2”的尺寸为 $N \times N(N^2 + 2) \times (N + 1)$ 。它们在 x 和 y 轴方向上的阵元间距为半波长, 在 z 轴方向上的阵元间距为 $d_{Rz} = N^2 + 3$ 倍的半波长。由这 2 个虚拟立体子阵所组成的虚拟“十”字形立体阵在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上的阵列孔径分别为 $(N^3 + 2N - 1)d$ 、 $(N^3 + 2N - 1)d$ 和 $(N^3 + 3N)d$ 。

4 基于耦合张量的 DOA 估计

为充分利用如图 4 所示虚拟“十”字形立体阵在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上的大阵列孔径来提升信号二维 DOA 估计性能, 本节将提出借助耦合张量对该阵列信号进行建模和处理的方法。

4.1 耦合张量建模

如图 4 所示, 虚拟“十”字形立体阵由 2 个垂直交叉的“虚拟立体子阵 1”和“虚拟立体子阵 2”组成, 2 个子阵重合部分的立体阵(简称为“重合立体阵”)的尺寸为 $N \times N \times (N + 1)$, 其阵元在 x 轴的坐标为 $\left(-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \dots, \frac{N-1}{2}\right)d$, y 轴的坐标为 $\left(-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \dots, \frac{N-1}{2}\right)d$, z 轴的坐标为 $\left(-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\right)(N^2 + 3)d$ 。特别地, 当 $N=5$ 时, 重合立体阵在 x 、 y 和 z 轴方向上的阵元位置分别是 $[-2:1:2]d$ 、 $[-2:1:2]d$ 和 $[-70:28:70]d$, 虚拟阵列重合部分如图 5 所示。

将重合立体阵在 x 、 y 和 z 轴方向的方向向量分别从 \mathcal{R}_6 和 \mathcal{X}_6 中提取出来, 以构造出耦合张量模型中的公共项。观察 \mathcal{R}_6 的表达式可知, 其第 2 维和第 3 维度对应的方向向量分别为 $\mathbf{b}_{R,k}$ 和 $\mathbf{c}_{V,k}$, 它们正是重合立体阵在 y 和 z 轴方向上的方向向量。 \mathcal{R}_6 中第 1 维度对应的方向向量 $\mathbf{a}_{V,k}$ 包含了重合立体阵在 x 轴方向

上的方向向量 $\mathbf{a}_{V,k} = \left[\Theta_k^{-\frac{N-1}{2}}, \Theta_k^{-\frac{N-1}{2}+1}, \dots, \Theta_k^{\frac{N-1}{2}}\right]^T$,

且 $\mathbf{a}_{V,k}$ 所对应的阵元分布是均匀的, 具有多重不变性结构。利用该结构特性可从 $\mathbf{a}_{V,k}$ 中提取出 $\mathbf{a}_{V,k}$, 从而将 $\mathcal{R}_6 \in \mathbb{C}^{(N^3 + 2N) \times N \times (N + 1)}$ 转换成 $\mathcal{R}_7 \in \mathbb{C}^{N \times (N^3 + N + 1) \times N \times (N + 1)}$, 具体方法如下。

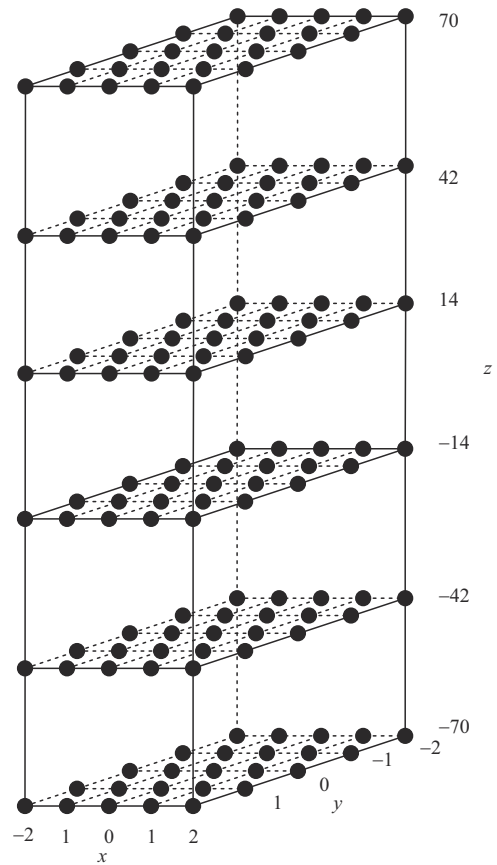


图 5 虚拟阵列重合部分($N=5$)

以重合立体阵作为参考子阵(其 x 轴方向的方向向量为 $\mathbf{a}_{V,k}$), 将 \mathcal{R}_6 所对应的“虚拟立体子阵 1”沿 x 轴方向拆分成 $N^3 + N + 1$ 个尺寸为 $N \times N \times (N + 1)$ 的重叠子阵, 如图 6 所示, 其中中心部分为参考子阵在 x - y 平面的投影。

将 \mathcal{R}_6 沿着 x 轴正方向依次进行拆分, 则自参考子阵起至 x 轴的最右端一共可得 $\frac{N^3 + N + 2}{2}$ 个立体子阵(包含参考子阵), 将这些立体子阵对应的数据进行如下组合, 可得到 $\mathcal{R}_{6,1} \in \mathbb{C}^{N \times \frac{N^3 + N + 2}{2} \times N \times (N + 1)}$ 。

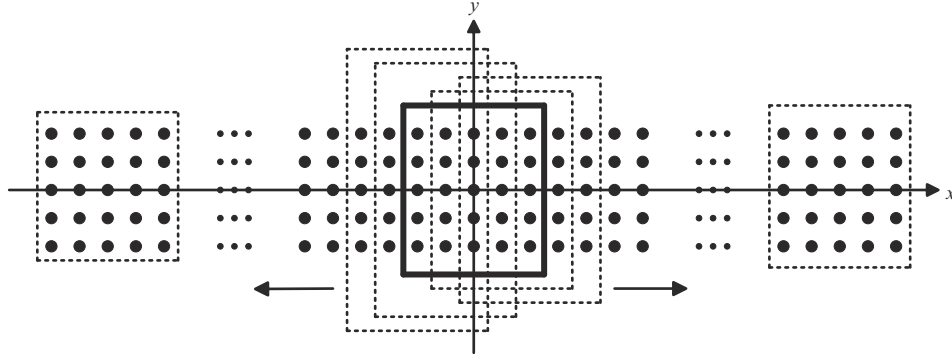


图 6 虚拟立体子阵 1 在 x-y 平面的投影及其拆分

$$\mathcal{R}_{6,1}(:, i, :, :) = \mathcal{R}_6 \left(\frac{N^3 + N}{2} + i : \frac{N^3 + N}{2} + N + i - 1, :, : \right) \quad (30)$$

其中, $1 \leq i \leq \frac{N^3 + N + 2}{2}$ 。由多重不变性结构特性, $\mathcal{R}_{6,1}$ 可表示为

$$\mathcal{R}_{6,1} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{VS,k} \circ \mathbf{a}_{VN1,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \quad (31)$$

其中, $\mathbf{a}_{VN1,k} = \left[1, \theta_k^1, \dots, \theta_k^{\frac{N^3 + N}{2}} \right]^T$ 。

将 \mathcal{R}_6 沿着 x 轴负方向依次进行拆分, 则自参考子阵起至 x 轴的最左端一共可得 $\frac{N^3 + N + 2}{2}$ 个立体子阵 (包含参考子阵), 将这些立体子阵对应的数据进行如下组合, 可得到 $\mathcal{R}_{6,2} \in \mathbb{C}^{N \times \frac{N^3 + N + 2}{2} \times N \times (N + 1)}$ 。

$$\mathcal{R}_{6,2}(:, j, :, :) = \mathcal{R}_6 \left(\frac{N^3 + N}{2} - j + 2 : \frac{N^3 + N}{2} + N - j + 1, :, : \right) \quad (32)$$

其中, $1 \leq j \leq \frac{N^3 + N + 2}{2}$ 。由多重不变性结构特性, $\mathcal{R}_{6,2}$ 可表示为

$$\mathcal{R}_{6,2} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{VS,k} \circ \mathbf{a}_{VN2,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \quad (33)$$

其中, $\mathbf{a}_{VN2,k} = \left[1, \theta_k^{-1}, \dots, \theta_k^{-\frac{N^3 + N}{2}} \right]^T$ 。

将 $\mathcal{R}_{6,2}$ 中第 2 维度倒置得到 $\mathcal{R}_{6,3}$, 可表示为

$$\mathcal{R}_{6,3} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{VS,k} \circ \mathbf{a}_{VN3,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \quad (34)$$

其中, $\mathbf{a}_{VN3,k} = \left[\theta_k^{-\frac{N^3 + N}{2}}, \theta_k^{-\frac{N^3 + N}{2} + 1}, \dots, 1 \right]^T$ 。

将 $\mathcal{R}_{6,1}$ 和 $\mathcal{R}_{6,3}$ 按式(35)合并成 \mathcal{R}_7 。

$$\begin{cases} \mathcal{R}_7 \left(:, 1 : \frac{N^3 + N + 2}{2}, :, : \right) = \mathcal{R}_{6,3} \\ \mathcal{R}_7 \left(:, \frac{N^3 + N + 2}{2} + 1 : N^3 + N + 1, :, : \right) = \mathcal{R}_{6,1} \left(:, 2 : \frac{N^3 + N + 2}{2}, :, : \right) \end{cases} \quad (35)$$

则 $\mathcal{R}_7 \in \mathbb{C}^{N \times (N^3 + N + 1) \times N \times (N + 1)}$ 可表示为

$$\mathcal{R}_7 = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_{VS,k} \circ \mathbf{a}_{VN,k} \circ \mathbf{b}_{R,k} \circ \mathbf{c}_{V,k} \sigma_k^2 \quad (36)$$

其中, $\mathbf{a}_{VN,k} = \left[\theta_k^{-\frac{N^3 + N}{2}}, \theta_k^{-\frac{N^3 + N}{2} + 1}, \dots, \theta_k^{\frac{N^3 + N}{2}} \right]^T$ 。

至此完成了从 $\mathbf{a}_{V,k}$ 中提取 $\mathbf{a}_{VS,k}$ 从而将 $\mathcal{R}_6 \in \mathbb{C}^{(N^3 + 2N) \times N \times (N + 1)}$ 变换成 $\mathcal{R}_7 \in \mathbb{C}^{N \times (N^3 + N + 1) \times N \times (N + 1)}$ 的操作。

由 \mathcal{R}_7 的表达式可知, 其第 1、3 和 4 维度是重合立体阵分别在 x、y 和 z 轴方向上的方向向量。利用定义 2 对 \mathcal{R}_7 进行模 {3,1,4} {2} 的张量展开得到矩阵 $\mathbf{R}_8 \in \mathbb{C}^{(N^3 + N^2) \times (N^3 + N + 1)}$ 。

$$\mathbf{R}_8 = \mathcal{R}_7_{\{3,1,4\}\{2\}} = \sum_{k=1}^K (\mathbf{c}_{V,k} \otimes \mathbf{a}_{VS,k} \otimes \mathbf{b}_{R,k}) \circ \mathbf{a}_{VN,k} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^K \mathbf{h}_k \circ \mathbf{a}_{VN,k} \sigma_k^2 \quad (37)$$

其中, $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_{V,k} \otimes \mathbf{a}_{VS,k} \otimes \mathbf{b}_{R,k}$, 且 $\mathbf{a}_{VS,k}$ 、 $\mathbf{b}_{R,k}$ 和 $\mathbf{c}_{V,k}$ 分别是公共立体阵分别在 x、y 和 z 轴方向上的方向向量。

注意, \mathbf{R}_8 是一个矩阵, 不适合对其进行

后续的耦合张量分解。为此，利用 \mathbf{R}_8 中第 2 个维度 $\mathbf{a}_{VNS,k}$ 所具有的多重不变性结构特性，通过式 (38) 将 $\mathbf{R}_8 \in \mathbb{C}^{(N^3+N^2) \times (N^3+N+1)}$ 变换成张量 $\mathcal{R}_9 \in \mathbb{C}^{(N^3+N^2) \times (N^3+N) \times 2}$ 。

$$\begin{cases} \mathcal{R}_9(:, :, 1) = \mathbf{R}_8(:, 1: N^3 + N) \\ \mathcal{R}_9(:, :, 2) = \mathbf{R}_8(:, 2: N^3 + N + 1) \end{cases} \quad (38)$$

且 \mathcal{R}_9 可表示为

$$\mathcal{R}_9 = \sum_{k=1}^K \mathbf{h}_k \circ \mathbf{a}_{VNS,k} \circ \mathbf{a}_{VNN,k} \sigma_k^2 \quad (39)$$

其中， $\mathbf{a}_{VNS,k} = \left[\theta_k^{-\frac{N^3+N}{2}}, \theta_k^{-\frac{N^3+N}{2}+1}, \dots, \theta_k^{\frac{N^3+N}{2}-1} \right]^T$ ，

$\mathbf{a}_{VNN,k} = [1, \theta_k]^T$ 。

通过上述处理，将“虚拟立体子阵 1”的接收信号张量 \mathcal{R}_6 转换成适合对其进行耦合张量分解的张量 \mathcal{R}_9 。

类似地，以重合立体阵作为参考子阵，将“虚拟立体子阵 2”分别沿着 y 轴的正、负方向依次进行拆分等处理，可将“虚拟立体子阵 2”的接收信号张量 \mathcal{X}_6 转换成适合对其进行耦合张量分解的张量 $\mathcal{X}_9 \in \mathbb{C}^{(N^3+N^2) \times (N^3+N) \times 2}$ 。

$$\mathcal{X}_9 = \sum_{k=1}^K \mathbf{h}_k \circ \mathbf{b}_{VNS,k} \circ \mathbf{b}_{VNN,k} \sigma_k^2 \quad (40)$$

其中， $\mathbf{b}_{VNS,k} = \left[\psi_k^{-\frac{N^3+N}{2}}, \psi_k^{-\frac{N^3+N}{2}+1}, \dots, \psi_k^{\frac{N^3+N}{2}-1} \right]^T$ ，

$\mathbf{b}_{VNN,k} = [1, \psi_k]^T$ 。

令 $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{R}_9$ ， $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{X}_9$ ，则它们可组成一组耦合 CP 张量模型 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ ，且公共项为 \mathbf{h}_k 。

至此，将虚拟“十”字形立体阵中的“虚拟立体子阵 1”和“虚拟立体子阵 2”的接收信号张量 \mathcal{R}_6 和 \mathcal{X}_6 建模成了一组耦合张量模型 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ ，且公共项为 \mathbf{h}_k 。

4.2 DOA 估计及解相位模糊

针对虚拟“十”字形立体阵所对应的耦合张量模型 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ ，利用耦合张量分解^[28]可得到 \mathbf{h}_k 、 $\mathbf{a}_{VNS,k}$ 和 $\mathbf{b}_{VNS,k}$ 的因子矩阵 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K]$ 、 $\mathbf{A}_{VNS} = [\mathbf{a}_{VNS,1}, \dots, \mathbf{a}_{VNS,K}]$ 和 $\mathbf{B}_{VNS} = [\mathbf{b}_{VNS,1}, \dots, \mathbf{b}_{VNS,K}]$ 的估计值。

由方向向量 $\mathbf{a}_{VNS,k}$ 和 $\mathbf{b}_{VNS,k}$ 的表达式可知，利用因

子矩阵 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 可分别求出 K 个入射信号的方向余弦 $\omega_{x,k} = \sin \phi_k \cos \theta_k$ 和 $\omega_{y,k} = \sin \phi_k \sin \theta_k$ ，进而估计出入射信号的方位角和俯仰角。但是 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 所对应的阵列位于 x - y 平面，因此在 z 轴方向阵列孔径较小，从而导致俯仰角的估计精度低于方位角。

向量 $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_{V,k} \otimes \mathbf{a}_{VNS,k} \otimes \mathbf{b}_{R,k}$ 包含了重合立体阵在 z 轴方向上的方向向量 $\mathbf{c}_{V,k}$ ，且该阵列在 z 轴方向上具有较大的阵列孔径，从而具有更高的俯仰角估计精度。需要注意的是，该阵列在 z 轴方向上的阵元间距是大于半波长的，所以从 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K]$ 中估计的俯仰角可能存在相位模糊。但该相位模糊可通过 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 估计出的精度相对较低的俯仰角作为参照加以消除。

由于因子矩阵 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 在结构上符合范德蒙矩阵的特点，因此可用范德蒙恢复，分别从中得到方向余弦的估计值 $\hat{\omega}_{x,k}$ 和 $\hat{\omega}_{y,k}$ ，进而得到俯仰角和方位角的估计值 $\hat{\phi}_{xy,k}$ 和 $\hat{\theta}_{xy,k}$ 。

因子矩阵 $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_K] = [\mathbf{c}_{V,1} \otimes \mathbf{a}_{VNS,1} \otimes \mathbf{b}_{R,1}, \dots, \mathbf{c}_{V,K} \otimes \mathbf{a}_{VNS,K} \otimes \mathbf{b}_{R,K}]$ 中包含了阵列在 z 轴方向的方向向量 $\mathbf{c}_{V,k}$ ，将 $\mathbf{c}_{V,k} = [\mathbf{c}_{R,k}^T, \mathbf{c}_{RD,k}^T]^T$ 的表达式变形为

$$\mathbf{c}_{V,k} = \Omega_k^{-\frac{N^3-3N}{2}} \left[1, \Omega_k^{N^2+3}, \dots, \Omega_k^{(N^2+3)N} \right]^T \quad (41)$$

由式(41)可知，其对应的阵元在 z 轴上是呈稀疏均匀分布的，阵元间距为 $d_{Rz} = N^2 + 3$ 倍的半波长。因此可通过 $\mathbf{c}_{V,k}$ 中的 $\Omega_k^{d_{Rz}}$ 求出更高精度的俯仰角，但同时包含相位模糊。结合 $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_{V,k} \otimes \mathbf{a}_{VNS,k} \otimes \mathbf{b}_{R,k}$ 计算方式，对估计出的因子矩阵 \mathbf{H} 进行如下操作可求出由 $\{\Omega_k^{d_{Rz}}\}_{k=1}^K$ 组成的对角阵 $\boldsymbol{\beta} = \text{diag} \{ \Omega_1^{d_{Rz}}, \dots, \Omega_K^{d_{Rz}} \}$ 。

令

$$\mathbf{H}(N^2 + 1: N^3 + N^2, :) = \mathbf{H}(1: N^3, :) \boldsymbol{\beta} \quad (42)$$

假设入射信号满足文献[29]中的定理 4，则 \mathbf{H} 是一个列满秩矩阵，从而有

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}(1: N^3, :)^{\dagger} \mathbf{H}(N^2 + 1: N^3 + N^2, :) \quad (43)$$

其中， $(\cdot)^{\dagger}$ 表示伪逆。

通过式(43)求出对角阵 $\boldsymbol{\beta}$ ，再从 $\Omega_k^{d_{Rz}} = e^{-j\pi d_{Rz} \omega_{z,k}}$ 中获取其相位信息从而得到 $\pi d_{Rz} \omega_{z,k}$ 的观测值 $\gamma_{z,k}$ ，但其取值范围为 $-\pi \leq \gamma_{z,k} \leq \pi$ 。而 $\pi d_{Rz} \omega_{z,k}$ 的真实取值范围应为 $-d_{Rz} \pi \leq \pi d_{Rz} \omega_{z,k} \leq d_{Rz} \pi$ 。因此，当阵元

间距大于半波长, 即 $d_{Rz} > 1$ 时, 会出现角度模糊现象。

由于虚拟“十”字形立体阵在 z 轴方向的阵元间距为 $d_{Rz}d$, 且 $d_{Rz} = N^2 + 3 > 3$, 因此由因子矩阵 \mathbf{H} 所估计的俯仰角存在相位模糊。具体地, 令 $\hat{\omega}_{z,k}$ 为 $\omega_{z,k}$ 估计值的集合, 其中包含多个具有相位模糊的 $\omega_{z,k}$ 的估计值, 则观测值 $\gamma_{z,k}$ 与集合 $\hat{\omega}_{z,k}$ 之间存在以下关系。

$$\pi d_{Rz} \hat{\omega}_{z,k} = \left\{ \gamma_{z,k} + 2m\pi, -\left\lceil \frac{d_{Rz}}{2} \right\rceil \leq m \leq \left\lfloor \frac{d_{Rz}}{2} \right\rfloor \right\} \quad (44)$$

其中, $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整。进一步可得

$$\hat{\omega}_{z,k} = \left\{ \frac{\gamma_{z,k} + 2m\pi}{\pi d_{Rz}}, -\left\lceil \frac{d_{Rz}}{2} \right\rceil \leq m \leq \left\lfloor \frac{d_{Rz}}{2} \right\rfloor \right\} \quad (45)$$

其中, m 为整数。

上述相位模糊可以通过以下方法实现, 通过因子矩阵 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 中所估计出的俯仰角 $\hat{\phi}_{xy,k}$ 可得其对应的方向余弦 $\omega_{z,k}$ 估计值 $\hat{\omega}_{zxy,k} = \cos \hat{\phi}_{xy,k}$ 。将 $\hat{\omega}_{zxy,k}$ 作为参考值, 在集合 $\hat{\omega}_{z,k}$ 中选取一个与 $\hat{\omega}_{zxy,k}$ 欧氏距离最近的元素作为 $\omega_{z,k}$ 的最终估计值 $\hat{\omega}_{zc,k}$ 。再根据 $\hat{\omega}_{zc,k} = \cos \hat{\phi}_{z,k}$ 求出具有较高精度的俯仰角 ϕ_k 估计值 $\hat{\phi}_{z,k}$ 。

经过上述处理方法, 可从虚拟“十”字形立体阵的耦合张量模型 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 中估计出 K 个入射信号的俯仰角和方位角 $\{\hat{\phi}_{z,k}, \hat{\theta}_{xy,k}\}_{k=1}^K$ 。

4.3 新方法步骤总结及其阵列孔径分析

综上所述, 对于图 1 所示的新三维稀疏阵列, 其包含的 3 个子阵的接收信号分别为式(11)~式(13)中的 \mathbf{X}_{Lx} 、 \mathbf{X}_{Ly} 和 \mathbf{C}_R , 通过以下步骤对其进行处理可生成具有大孔径的虚拟“十”字形立体阵, 并从中获得较高的二维 DOA 估计性能。

1) 计算 $E\{\mathbf{X}_{Lx} \circ \mathbf{C}_R^*\}$ 得到 \mathcal{R}_1 , 并将 \mathcal{R}_1 的后 3 个维度倒置得到 \mathcal{R}_2 。将 \mathcal{R}_1 求共轭得到 \mathcal{R}_3 , 并将 \mathcal{R}_3 中第 1 个维度倒置得到 \mathcal{R}_4 。

2) 对 \mathcal{R}_2 和 \mathcal{R}_4 进行组合得到 \mathcal{R}_5 , 对 \mathcal{R}_5 进行张量展开得 \mathcal{R}_6 , 从而构建出如图 2 所示的“虚拟立体子阵 1”。

3) 从 \mathcal{R}_6 中提取出重合立体阵在 x 轴方向的方向向量得到 \mathcal{R}_7 。合并 \mathcal{R}_7 中重合立体阵在 x 、 y 和 z 轴方向的方向向量后得到矩阵 \mathbf{R}_8 。

4) 对矩阵 \mathbf{R}_8 中第 2 维度进行拆分组合得到 \mathcal{R}_9 , 从而构建出耦合张量模型的第一个分量 $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{R}_9$ 。

5) 对 \mathbf{X}_{Ly} 和 \mathbf{C}_R 也进行类似步骤 1)~步骤 4) 的操作得到 \mathcal{X}_9 , 从而构建出如图 3 所示的“虚拟立体子阵 2”, 及其对应的耦合张量的第二个分量 $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{X}_9$ 。

6) 将 \mathcal{R}_9 和 \mathcal{X}_9 构建为耦合张量 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$, 并从 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 中估计出因子矩阵 \mathbf{H} 、 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 。

7) 从因子矩阵 \mathbf{A}_{VNS} 和 \mathbf{B}_{VNS} 中分别得到俯仰角和方位角的估计值 $\hat{\phi}_{xy,k}$ 和 $\hat{\theta}_{xy,k}$, 从因子矩阵 \mathbf{H} 中得到存在相位模糊的方向余弦估计值 $\hat{\omega}_{z,k}$ 。

8) 将 $\hat{\omega}_{zxy,k} = \cos \hat{\phi}_{xy,k}$ 作为参考值, 在集合 $\hat{\omega}_{z,k}$ 中选取一个与 $\hat{\omega}_{zxy,k}$ 欧氏距离最近的元素作为 $\omega_{z,k}$ 最终的估计值 $\hat{\omega}_{zc,k}$ 。

9) 根据 $\hat{\omega}_{zc,k} = \cos \hat{\phi}_{z,k}$, 求出具有较高精度的入射信号俯仰角的估计值 $\hat{\phi}_{z,k}$ 。至此得到入射信号的二维 DOA 估计 $\{\hat{\phi}_{z,k}, \hat{\theta}_{xy,k}\}_{k=1}^K$ 。

表 1 给出了在不同参数 N 下, 新三维阵列在 x 、 y 和 z 轴方向的阵列孔径值, 其中 d 表示半波长。为了更加直观, 表 1 还给出了当 N 分别取 3、5、7、9 和 11 时, 新三维阵列在各方向上的阵列孔径值。

表 1 N 取不同参数时新三维阵列在各方向上的阵列孔径值

N 的取值	物理阵元总数/个	x 轴方向孔径	y 轴方向孔径	z 轴方向孔径
N	$\frac{N^3}{2} + \frac{5N^3}{2} + 3$	$(N^3 + 2N - 1)d$	$(N^3 + 2N - 1)d$	$(N^3 + 3N)d$
3	39	$32d$	$32d$	$36d$
5	128	$134d$	$134d$	$140d$
7	297	$356d$	$356d$	$364d$
9	570	$746d$	$746d$	$756d$
11	971	$1\ 352d$	$1\ 352d$	$1\ 364d$

由表 1 可知, 新三维阵列在 3 个方向上的阵列孔径增益超出了所增加的物理阵元数, 这是其他对比三维阵列无法做到的。换言之, 在相同的物理阵元数下, 新三维阵列具有更大的阵列孔径。

4.4 耦合张量分解唯一性分析

本文方法是通过对虚拟“十”字形立体阵的耦合张量模型 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 进行耦合张量分解来实现 DOA 估计的, 但耦合张量分解应保证是唯一的。

结合定理 1 和定理 2, 针对本文的耦合张量 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$, 其耦合张量分解唯一性条件可描述为:

在保证其公共因子矩阵, 即 \mathbf{H} 列满秩的条件下, $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 中有一个张量的 CP 分解唯一。据此, 对耦合张量 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 分解唯一所需满足的条件分析如下。

1) 如前所述, $\mathbf{h}_k = \mathbf{c}_{V,k} \otimes \mathbf{a}_{VS,k} \otimes \mathbf{b}_{R,k}$ 是 $\mathcal{L}^{(1)}$ 和 $\mathcal{L}^{(2)}$ 的公共向量。当入射信号 DOA 估计的取值满足文献[29]中的定理 4 时, \mathbf{h}_k 对应的因子矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(N^3+N^2) \times K}$ 列满秩^[29], 此时有

$$\text{krank}(\mathbf{H}) = \min(K, N^3 + N^2) \quad (46)$$

2) 考虑 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 中任意一个张量 $\mathcal{L}^{(2)}$ ($\mathcal{L}^{(1)}$ 亦可) 的 CP 分解唯一性。当入射信号 DOA 的取值满足文献[29]中的定理 4 时, $\mathcal{L}^{(2)}$ 中 $\mathbf{b}_{VN,k}$ 和 $\mathbf{c}_{VN,k}$ 对应的因子矩阵的 k-秩分别为

$$\text{krank}(\mathbf{B}_{VN}) = \min(K, N^3 + N) \quad (47)$$

$$\text{krank}(\mathbf{C}_{VN}) = \min(K, 2) \quad (48)$$

为使张量 $\mathcal{L}^{(2)}$ 满足 CP 分解唯一, 利用定理 2, 同时结合条件 1) 中的 $\text{krank}(\mathbf{H})$ 可得其应满足的条件为

$$\text{krank}(\mathbf{H}) + \text{krank}(\mathbf{B}_{VN}) + \text{krank}(\mathbf{C}_{VN}) \geq 2K + 2 \quad (49)$$

式(49)可以变化为

$$\min(K, N^3 + N^2) + \min(K, N^3 + N) + \min(K, 2) \geq 2K + 2 \quad (50)$$

为得到最大的 K 值, 令 K 满足 $K \geq 2$, 则

$$\min(K, 2) = 2 \quad (51)$$

此时式(50)可化简为

$$\min(K, N^3 + N^2) + \min(K, N^3 + N) \geq 2K \quad (52)$$

为保证式(52)成立, 则需满足

$$K \leq N^3 + N \quad (53)$$

因此, 当入射信号个数 K 满足式(53)时, $\mathcal{L}^{(2)}$ 的 CP 分解唯一。再结合因子矩阵 \mathbf{H} 列满秩, 可得耦合张量 $\{\mathcal{L}^{(h)}\}_{h=1}^2$ 的耦合张量分解唯一性条件也是式(53)。

5 仿真实验

仿真实验分成两部分: 一是本文方法在不同阵列参数 N 下的仿真实验, 涉及实验 1; 二是在物理阵元总数相近的情况下 (新三维阵列的物理阵元数不多于与之对标的阵列), 将新三维阵列与三维锥形阵^[18]、三维 L 形阵^[19]和三维互质阵^[22]进行 DOA

估计性能对标的仿真实验, 涉及实验 2~实验 5。

设置新三维阵列的阵元分布如图 1 所示, 即 $N_{Rx} = N_{Ry} = N = 5$, $N_{Rz} = \frac{N+1}{2} = 3$ 和 $N_{Lx} = N_{Ly} = N^2 + 2 = 27$, 共计 $\frac{N^3}{2} + \frac{5N^2}{2} + 3 = 128$ 个阵元。据此, 将三维锥形阵的物理阵元总数设置为 144 个, 三维 L 形阵的物理阵元总数设置为 128 个, 三维互质阵的物理阵元总数设置为 132 个。此时, 各阵列在 x 、 y 和 z 轴 3 个方向上的阵列孔径如表 2 所示。

表 2 各阵列在不同方向上的阵列孔径

阵列	物理阵元总数/个	x 轴方向孔径	y 轴方向孔径	z 轴方向孔径
新三维阵列	128	134d	134d	140d
三维 L 形阵	128	42d	42d	41d
三维锥形阵	144	11d	11d	10d
三维互质阵	132	8d	8d	8d

新三维阵列采用本文所述的基于耦合张量的处理方法估计二维 DOA; 三维锥形阵和三维 L 形阵均采用 MUSIC 方法进行估计; 三维互质阵采用其分别提出的 TA-MUSIC^[22]和 E-MUSIC^[22]方法进行估计。其中, 所采用的 MUSIC 和 TA-MUSIC 方法的谱峰搜索步进均为 0.005 度, E-MUSIC 方法的方向余弦搜索步进为 0.000 5。

定义 DOA 均方根误差 (RMSE, root mean square error) 为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{\bar{N}K} \sum_{t=1}^{\bar{N}} \sum_{k=1}^K \left[\left(\theta_k - \widehat{\theta}_k^t \right)^2 + \left(\phi_k - \widehat{\phi}_k^t \right)^2 \right]} \quad (54)$$

其中, \bar{N} 为蒙特卡罗仿真次数, $t = 1, 2, 3, \dots, \bar{N}$, θ_k 和 ϕ_k 分别为真实的方位角和俯仰角, $\widehat{\theta}_k^t$ 和 $\widehat{\phi}_k^t$ 分别为第 t 次蒙特卡罗仿真得到的方位角和俯仰角的估计值。

实验 1。假设有 2 个窄带远场不相关信号入射至新三维阵列, 其俯仰角和方位角组合分别是 $(38.3^\circ, 45.6^\circ)$ 和 $(55.5^\circ, 60.4^\circ)$, 快拍数为 100, 信噪比 (SNR, signal-to-noise ratio) 为 10 dB, 新三维阵列参数 N 分别设置为 3、5、7、9 和 11。在此环境下, 分别进行 100 次蒙特卡罗仿真, 则新三维阵列 DOA 估计的 RMSE 随参数 N 变化的结果如图 7 所示。由该仿真结果可知, 随着参数 N 的增大, 新三维阵列的阵列孔径也随之增大, RMSE 值随之减小, 这表明其对 DOA 估计的精度随之增高。

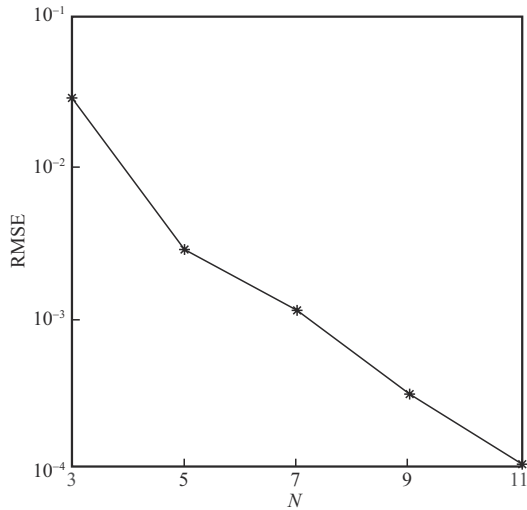


图7 新三维阵列 DOA 估计的 RMSE 随参数 N 变化结果

实验 2。采用与实验 1 相同的 2 个入射信号，快拍数固定为 100，SNR 由 -10 dB 变化至 20 dB，在此环境下进行 100 次蒙特卡罗对比实验。各阵列 DOA 估计的 RMSE 随 SNR 变化的结果如图 8 所示。由图 8 可知，新三维阵列凭借更大的阵列孔径，展现出更优的 DOA 估计精度，即其 RMSE 显著低于对比阵列。随着 SNR 的升高，所有阵列的 RMSE 均呈下降趋势，但新三维阵列始终保持在最低水平。

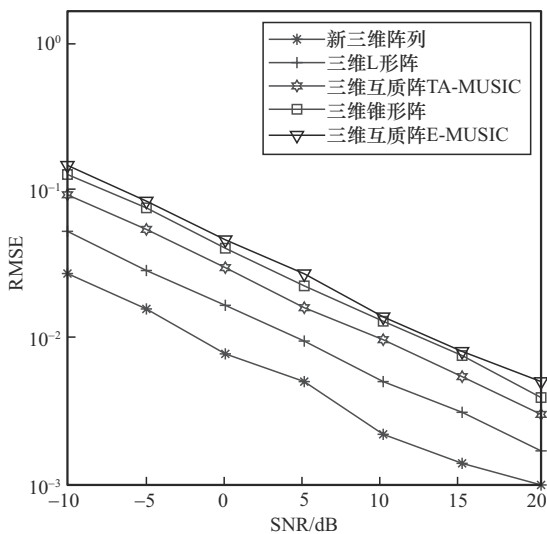


图8 各阵列 DOA 估计的 RMSE 随 SNR 变化的结果

实验 3。采用与实验 1 相同的 2 个入射信号，SNR 固定在 10 dB，快拍数从 50 变化到 250，在此环境下进行 100 次蒙特卡罗对比实验。各阵列 DOA 估计的 RMSE 随快拍数变化的结果如图 9 所示。由图 9 可知，和实验 2 结果类似，新三维阵列凭借更

大的阵列孔径，在不同快拍数下均展现出了最高的 DOA 估计精度。

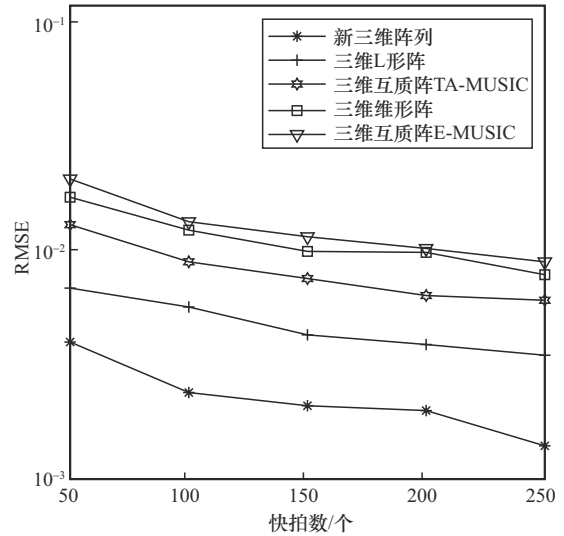


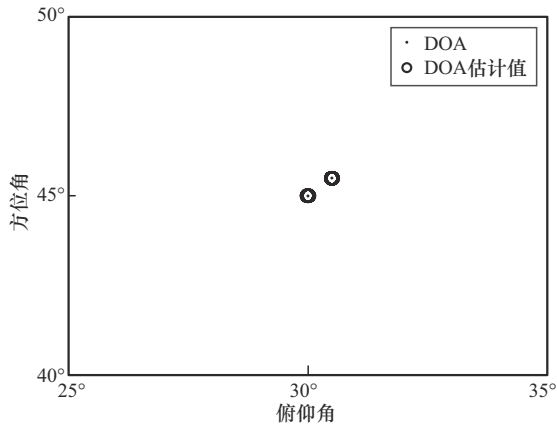
图9 各阵列 DOA 估计的 RMSE 随快拍数变化的结果

实验 4。对各算法在不同物理阵元数下的计算复杂度进行对比，所有算法均采用 Intel(R)Core (TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60 GHz 和 8 GB RAM 的 PC 机在 MATLABR2022b 中实现。2 组入射角和实验 1 相同，快拍数为 100，SNR=10 dB。一共进行 5 组实验，每组实验进行 100 次蒙特卡罗仿真。在这 5 组实验中，新三维阵列的参数 N 分别设置为 3、5、7、9 和 11，所对应的阵元个数分别为 39、128、297、570 和 971。其他阵列阵元数参考新三维阵列的阵元数进行设置。表 3 给出了各阵列平均完成一次蒙特卡罗仿真所需时间。由表 3 可知，所有阵列方法随着物理阵元数的增加其执行所需时间也随之增加。由于三维 L 形阵、三维锥形阵和三维互质阵 TA-MUSIC 方法采用的是全网格的 MUSIC 搜索方式，因此其执行所需时间会受到搜索网格大小的影响，且所需时间较长。本文方法在整个 5 组实验中执行所需时间均最少。因此，该实验表明所提信号处理方法还具有相对较高的实时性。

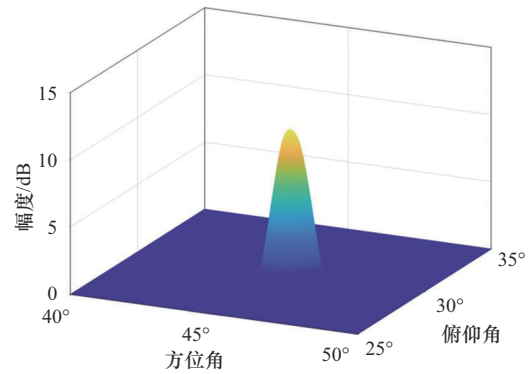
实验 5。对各阵列的信号角分辨率性能进行对比，2 组入射角设置成较为接近的 $(30^\circ, 45^\circ)$ 和 $(30.5^\circ, 45.5^\circ)$ ，SNR=10 dB，快拍数为 100。注意，新三维阵列方法以及三维互质阵 E-MUSIC 方法得到的是 DOA 估计的数值形式，其他阵列得到的是 DOA 估计的谱峰图形式。各阵列对这 2 个信号的分辨结果如图 10 所示，其中图 10(a)为新三维阵列

表3 各阵列平均完成一次蒙特卡罗仿真所需时间

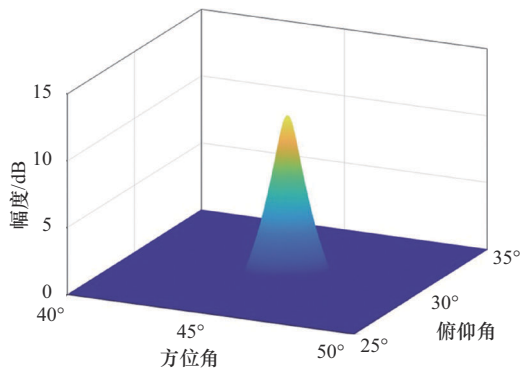
测试点	新三维阵列阵元个数/个	新三维阵列运行时间/s	三维L形阵列阵元个数/个	三维L形阵列运行时间/s	三维锥形阵列阵元个数/个	三维锥形阵列运行时间/s	三维互质阵列阵元个数/个	三维互质阵列TA-MUSIC算法运行时间/s	三维互质阵列E-MUSIC算法运行时间/s
1	39	0.39	42	5 850	49	6 600	34	100 100	1.15
2	128	1.26	132	434 850	144	40 050	132	295 000	3.26
3	297	7.04	300	695 050	324	112 400	340	3 875 000	41.41
4	570	36.27	580	1 285 650	576	568 950	636	17 965 000	203.40
5	971	212.16	973	2 422 500	1 024	2 636 100	1 071	137 180 000	797.13



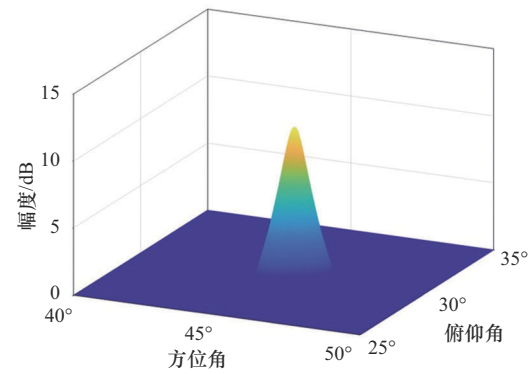
(a) 新三维阵列



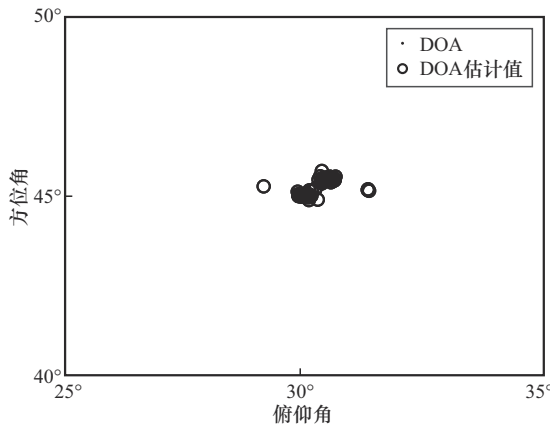
(b) 三维L形阵



(c) 三维锥形阵



(d) 三维互质阵TA-MUSIC



(e) 三维互质阵E-MUSIC

图10 各阵列的信号分辨结果

100次蒙特卡罗仿真的结果,图10(b)为三维L形阵仿真的结果,图10(c)为三维锥形阵仿真的结果,图10(d)为三维互质阵TA-MUSIC方法仿真的结果,图10(e)为三维互质阵E-MUSIC方法100次蒙特卡罗仿真的结果。由仿真结果可知,新三维阵列由于拥有更大的阵列孔径因此有更好的角度分辨率,能够有效分辨出这2个入射信号,而其他阵列皆不能分辨出这2个入射信号。

6 结束语

本文提出了一种三维稀疏阵列结构及其基于耦合张量分解的信号处理方法。该阵列采用的是1个非均匀稀疏立体子阵和2个均匀稀疏线形子阵相结合的结构。利用各子阵信号间的二阶统计量构建了一个虚拟的“十”字形立体阵,该阵列在 x 、 y 和 z 轴3个方向上均具有较大的阵列孔径。分析表明,当新三维阵列使用 $\frac{N^3}{2} + \frac{5N^2}{2} + 3$ (N 为大于2的奇数)个物理阵元时,虚拟立体阵在 x 和 y 轴方向的孔径均为 $(N^3 + 2N - 1)d$,在 z 轴方向的孔径为 $(N^3 + 3N)d$ 。需要注意的是,虚拟立体阵在 z 轴方向上的相邻阵元间距大于信号半波长 d ,因此当利用 z 轴方向上的方向向量来估计俯仰角时,虽然精度较高(由于大孔径)但同时也会伴随相位模糊。为此,还提出了基于耦合张量分解的虚拟立体阵信号处理方法,以充分利用其各方向上的大阵列孔径且消除相位模糊。与现有的三维锥形阵、三维L形阵和三维互质阵相比,在相同的物理阵元数下,新三维阵列由于具有更大的阵列孔径,从而具有更优的信号二维DOA估计精度和角分辨率性能。此外,所提信号处理方法还具有较低的计算复杂度。仿真结果验证了新三维阵列结构及其信号处理方法的有效性。

参考文献:

- [1] ZHANG X F, XU L Y, XU L, et al. Direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced-dimension MUSIC[J]. *IEEE Communications Letters*, 2010, 14(12): 1161-1163.
- [2] LIU J, ZHOU W D, JUWONO F H, et al. Reweighted smoothed l_0 -norm based DOA estimation for MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2017, 137: 44-51.
- [3] ZHANG W, LIU W, WANG J, et al. Computationally efficient 2-D DOA estimation for uniform rectangular arrays[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2014, 25(4): 847-857.
- [4] CHEN H, HOU C P, ZHU W P, et al. ESPRIT-like two-dimensional direction finding for mixed circular and strictly noncircular sources based on joint diagonalization[J]. *Signal Processing*, 2017, 141: 48-56.
- [5] ZHOU M, ZHANG X F, QIU X F, et al. Two-dimensional DOA estimation for uniform rectangular array using reduced-dimension propagator method[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2015, 2015(1): 485351.
- [6] XU F, ZHENG H, VOROBYOV S A. Tensor-based 2-D DOA estimation for L-shaped nested array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(1): 604-618.
- [7] ZHANG Y M, JIANG L J. A direct data approach to joint 2-D DOA and frequency estimation with L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(4): 3684-3694.
- [8] LABBAF N, OSKOEI H R D, ABEDI M R. Robust DoA estimation in a uniform circular array antenna with errors and unknown parameters using deep learning[J]. *IEEE Transactions on Green Communications and Networking*, 2023, 7(4): 2143-2152.
- [9] HENG W, ZHANG X F, GONG P, et al. DOA estimation for coprime linear arrays: an ambiguity-free method involving full DOFs[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 22(3): 562-565.
- [10] 干鹏. 非均匀阵列的信号处理算法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2018.
GAN P. Research on signal processing algorithm of non-uniform array[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2018.
- [11] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays in two dimensions, part I: geometrical considerations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(9): 4694-4705.
- [12] WU Q H, SUN F G, LAN P, et al. Two-dimensional direction-of-arrival estimation for co-prime planar arrays: a partial spectral search approach[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(14): 5660-5670.
- [13] SI W J, ZENG F H, QU Z Y, et al. Two-dimensional DOA estimation via a novel sparse array consisting of coprime and nested subarrays[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(6): 1266-1270.
- [14] REN M J, HU G P, SHI J P, et al. Generalized and symmetric coprime planar array for direction of arrival estimation[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2022, 16(6): 961-969.
- [15] 饶伟, 桂宇风, 李旦. 基于张量的互质面阵信号处理方法[J]. *通信学报*, 2020, 41(8): 99-109.
RAO W, GUI Y F, LI D. Tensor-based approach to the co-prime planar array signal processing[J]. *Journal on Communications*, 2020, 41(8): 99-109.
- [16] 张彦奎, 王大鸣, 耿卫, 等. 基于双向传播算子的互质面阵二维波达方向估计[J]. *电子学报*, 2019, 47(3): 576-583.
ZHANG Y K, WANG D M, GENG W, et al. Two-dimensional DOA estimation with coprime rectangular array using bi-directional propagator method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(3): 576-583.
- [17] ABOUMAHMOUD I, MUQAIBEL A, ALHASSOUN M, et al. A review of sparse sensor arrays for two-dimensional direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 92999-93017.
- [18] MORIYA H, ICHIGE K, ARAI H, et al. High-resolution 2-D DOA estimation by 3-D array configuration based on CRLB formulation[C]// *Processing of the 2012 IEEE 11th International Conference on Signal Processing*. Piscataway: IEEE press, 2012: 136-139.

- [19] VU D T, RENAUX A, BOYER R, et al. A Cramér Rao bounds based analysis of 3D antenna array geometries made from ULA branches[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2013, 24(1): 121-155.
- [20] GONG P, ZHANG X F, ZHAI H. DOA estimation for generalized three dimensional coprime arrays: a fast-convergence quadrilinear decomposition algorithm[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 62419-62431.
- [21] GONG P, AHMED T, LI J F. Three-dimensional coprime array for massive MIMO: array configuration design and 2D DOA estimation[J]. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 2020(1): 2686257.
- [22] GONG P, CHEN X X. Computationally efficient direction-of-arrival estimation algorithms for a cubic coprime array[J]. *Sensors*, 2021, 22(1): 136.
- [23] KOLDA T G, BADER B W. Tensor decompositions and applications[J]. *SIAM Review*, 2009, 51(3): 455-500.
- [24] KRUSKAL J B. Three-way arrays: rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1977, 18(2): 95-138.
- [25] RAO W, LI D, ZHANG J Q. A tensor-based approach to L-shaped arrays processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(2): 1-5.
- [26] LI Y, ZHANG J Q. Mode-subspace projection of a tensor for multidimensional harmonic parameter estimations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(11): 3002-3014.
- [27] SØRENSEN M, LATHAUWER L D D. Coupled canonical polyadic decompositions and (coupled) decompositions in multilinear rank- $(L_r, n, L_r, n, 1)$ terms: -part I: uniqueness[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2015, 36(2): 496-522.
- [28] SØRENSEN M, DOMANOV I, LATHAUWER L D. Coupled canonical polyadic decompositions and (coupled) decompositions in multilinear rank- $(L_r, n, L_r, n, 1)$ terms: -part II: algorithms[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2015, 36(3): 1015-1045.
- [29] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays in two dimensions, part II: application in two dimensional array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(9): 4706-4718.

[作者简介]



罗中华 (1971-), 男, 江西南昌人, 南昌理工学院教授, 主要研究方向为通信与信息系统。



左富豪 (1999-), 男, 河南周口人, 南昌工程学院硕士生, 主要研究方向为阵列信号处理。



樊棠怀 (1962-), 男, 江西修水人, 博士, 南昌理工学院教授, 主要研究方向为信息获取与处理。



饶伟 (1982-), 男, 江西乐安人, 博士, 南昌工程学院教授、硕士生导师, 主要研究方向为阵列信号处理、自适应信号处理。